Les 4 – Zetten, ribben, passen

Ribben kleuren

In les 1 hebben we kennis gemaakt met het spel Brussels sprouts van John H. Conway. We hebben toen ontdekt, dat het aantal zetten dat het spel duurt slechts afhangt van het aantal plustekens waarmee je begint. Hoe de twee spelers spelen heeft dus geen invloed op het aantal zetten. We hebben de volgende formule afgeleid:

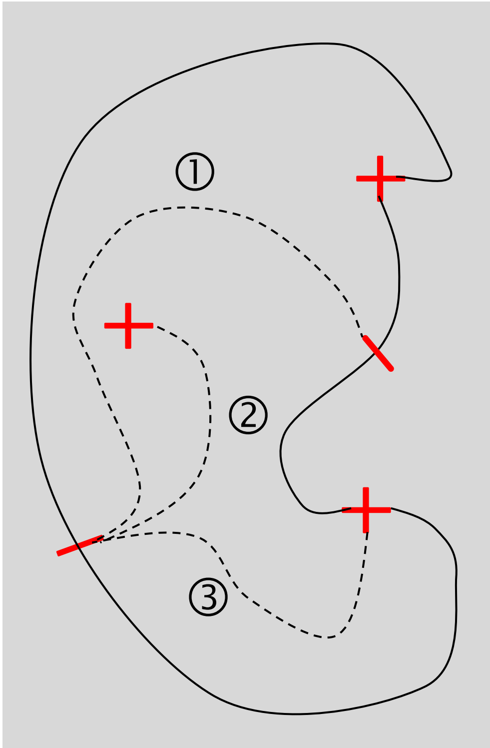
zetten = 5 · plustekens – 2

Op de weg naar dat verband zijn we de volgende formules tegengekomen:

plustekens = verbindende zetten + 1 (C1)

gebieden = splitsende zetten + 1 (C2)

Hierbij is met *plustekens* het aantal plustekens in het begin bedoeld, met *gebieden* het aantal gebieden aan het einde en met *verbindende* en *splitsende zetten* het aantal verbindende en splitsende zetten tijdens het spel.



① en ③ zijn splitsende zetten,

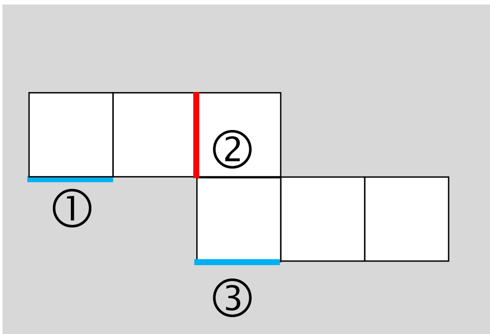
② is een verbindende zet.

In les 2 hebben we de formule van Euler ontdekt, en gezien dat deze formule geldt voor een heleboel veelvlakken. Door naar bouwplaten van veelvlakken te kijken, waren we in staat de formule van Euler verder te preciseren:

hoekpunten = geplakte ribben + 1 (E1)

vlakken = gevouwen ribben + 1 (E2)

De geplakte ribben zijn afkomstig van de ribben, die op de rand van de bouwplaat zatten; die hadden we blauw gekleurd. De gevouwen ribben zitten binnenin de bouwplaat; die hadden we rood gekleurd.

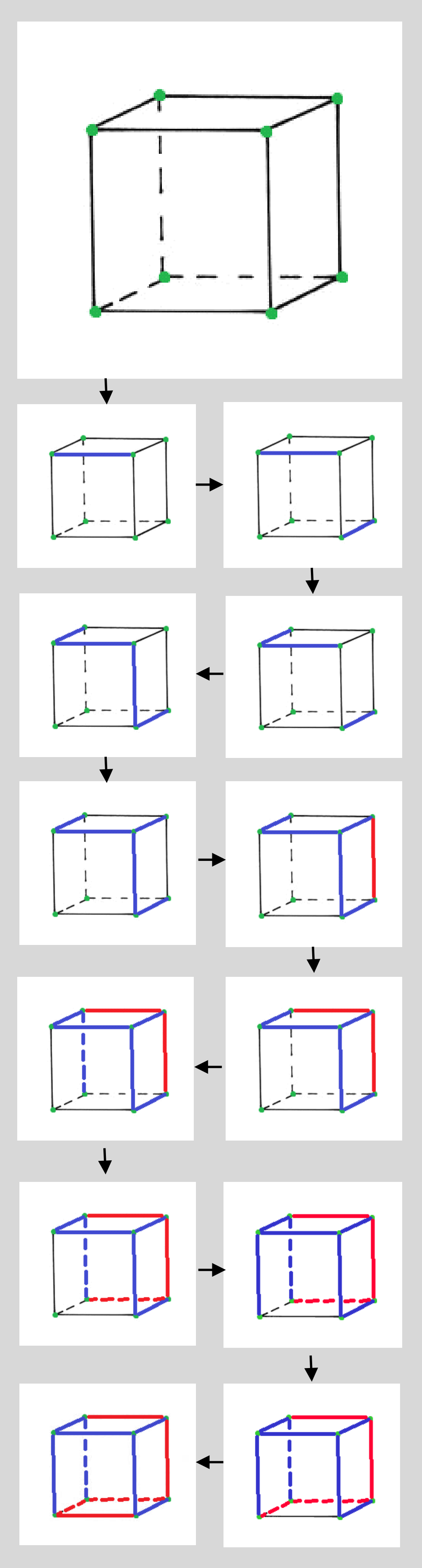


① en ③ vormen samen een geplakte ribbe,

② is een gevouwen ribbe.

Het valt op dat de vier formules (C1) ,(C2), (E1) en (E2) allemaal dezelfde vorm hebben. De ribben spelen in de formules (E1) en (E2) dezelfde rol als de zetten in de formules (C1) en (C2). De plustekens en gebieden spelen dezelfde rol als de hoekpunten en vlakken. Dit suggereert dat we de hoekpunten, vlakken en ribben van een veelvlak op de een of andere manier als plustekens, gebieden en zetten van een „sprouts-achtig“ spel kunnen opvatten. Dat gaat op de volgende manier:

Stel dat we een veelvlak hebben. In de beginsituatie zijn alleen de hoekpunten gekleurd, de ribben en vlakken niet. We gaan de ribben van het veelvlak stap voor stap kleuren. Het kleuren van een ribbe vatten we op als een zet. We doen dit als volgt.
Kies een nog ongekleurde ribbe. Indien de eindpunten van die ribbe nog niet door een gekleurd pad zijn verbonden, kleur dan deze ribbe blauw, anders rood.
Ga door totdat alle ribben gekleurd zijn.
Hiernaast hebben we dit voor de kubus uitgevoerd.



In het begin zijn alleen de hoekpunten gekleurd. Bij elke stap wordt één ribbe gekleurd, totdat ze aan het einde allemaal gekleurd zijn. In elke tussensituatie bestaat het gekleurde gedeelte uit *componenten*. Twee hoekpunten behoren tot één component als ze onderling door gekleurde ribben zijn verbonden.

We letten nu op het oppervlak van het veelvlak. In elke tussensituatie bestaat dat uit *gebieden*. Twee vlakken behoren tot één gebied als je van het ene vlak naar het andere kunt komen zonder een gekleurde ribbe over te steken.

Opdracht
Bepaal na elke stap van het afgebeelde kleurproces het aantal componenten van het gekleurde gedeelte en het aantal gebieden van het oppervlak van de kubus. Schrijf deze aantallen in de volgende tabel.

na zet	0	1	2	3	4	5	6
aantal componenten van het gekleurde gedeelte	8						
aantal gebieden van de kubus	1						

na zet	7	8	9	10	11	12
aantal componenten van het gekleurde gedeelte	3					
aantal gebieden van de kubus	3					

Vraag 1
We gaan nu een willekeurig veelvlak kleuren. Het aantal hoekpunten noemen we *H*, het aantal ribben *R* en het aantal vlakken *V*.
a. Uit hoeveel componenten bestaat het gekleurde gedeelte in het begin en aan het

einde van het kleurproces, uitgedrukt in *H*, *R* en *V*?
(Vergelijk dit met het inverse chocolade-probleem.)

b. Hoeveel blauwe ribben heeft het veelvlak dus aan het einde?

Telkens wanneer je een ribbe rood kleurt, wordt een gebied van het oppervlak in tweeën gesplitst. (*)

c. Hoeveel gebieden heeft het veelvlak in het begin en aan het einde van het kleurproces? (Vergelijk dit met het chocoladeprobleem.)
d. Hoeveel rode ribben heeft het veelvlak dus aan het einde?

(*) Niet alle veelvlakken hebben deze eigenschap, wel alle „normale“ veelvlakken die we zijn tegengekomen.ribbe.

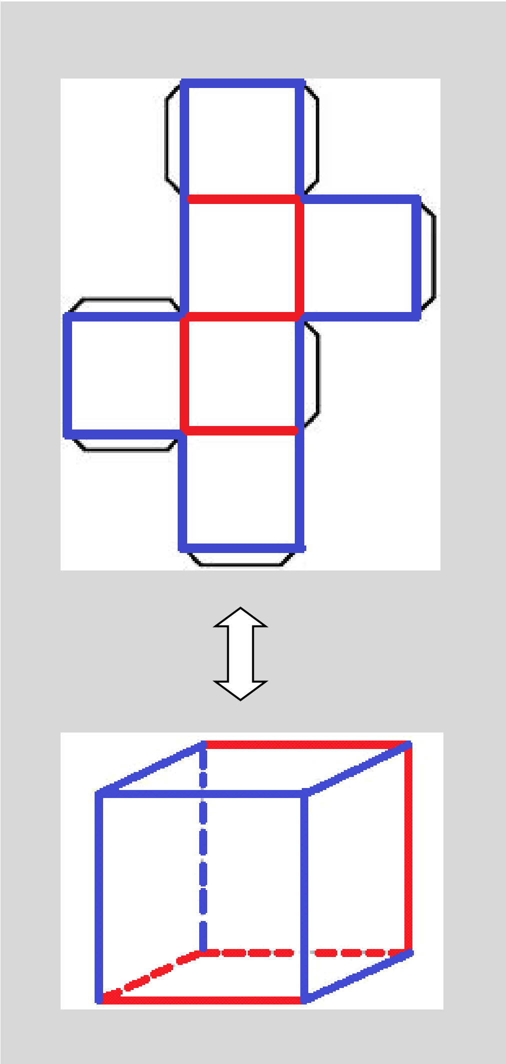
Opmerking

Of een bepaalde ribbe de blauwe of de rode kleur krijgt hangt af van de volgorde waarin we de ribben kleuren. Maar de *aantallen* blauwe en rode ribben aan het einde hangen niet af van de gekozen volgorde. Als we een bepaalde volgorde kiezen, worden de ribben verdeeld in twee klassen. In de eerste klasse komen de ribben, die tijdens het kleurproces twee *componenten* van het al gekleurde gedeelte met elkaar *verbinden*; dat zijn de blauwe ribben. In de tweede klasse komen de ribben die samen met het al gekleurde gedeelte een *gebied opsplitsen*; dat zijn de rode ribben.

Vraag 2

Stel dat je – door vouwen en plakken – van een bouwplaat een veelvlak hebt gemaakt. Begin met de hoekpunten te kleuren. Kleur dan op de voorgaande manier *eerst* de geplakte ribben in een willekeurige volgorde en *daarna* de gevouwen ribben, weer in een willekeurige volgorde.

a. Leg uit, dat je alle geplakte ribben blauw moet kleuren.
b. Leg uit, dat je alle gevouwen ribben rood moet kleuren.



We hebben dus een volgorde van kleuren gevonden, waarvoor geldt:

- tijdens de verbindende zetten kleur je de geplakte ribben,
- tijdens de splitsende zetten kleur je de gevouwen ribben.

Hiermee is de correspondentie tussen zetten en ribben gelegd!

Ondergang in stappen

In les 3 hebben we geleerd dat er een verband is tussen het aantal toppen, passen en dalen op een fatsoenlijk eiland en ook op een fatsoenlijke opgedroogde planeet. Voor zo'n planeet luidt dit verband:

toppen – passen + dalen = 2

Deze formule is door James Clerk Maxwell ontdekt en bewezen. In zijn bewijs maakte hij onderscheid tussen twee soorten passen: situatie-1-passen en situatie-2-passen. Hij vergeleek het aantal situatie-1-passen met het aantal toppen en het aantal situatie-2-passen met het aantal dalen. Zo vond hij de volgende formules:

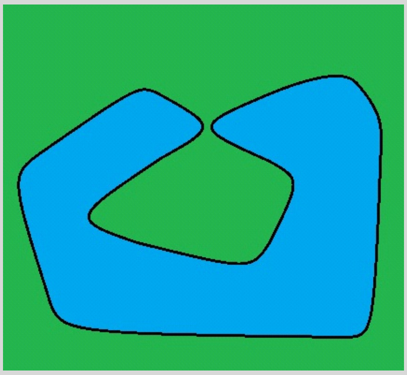
toppen = situatie-1-passen + 1 *(M1)*

dalen = situatie-2-passen + 1 *(M2)*

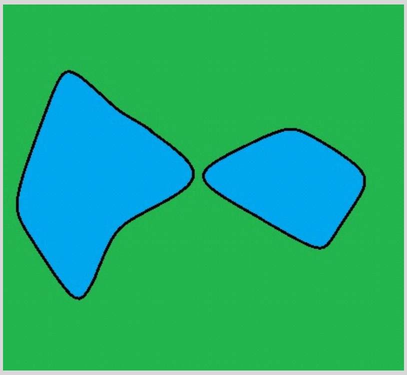
Ook deze twee formules lijken sprekend op de formules (C1), (C2), (E1), (E2) uit de eerste twee lessen.

Een spelverloop bij *Brussels sprouts* bestaat uit zetten. Er zijn verbindende en splitsende zetten. Bij de veelvlakken waren er in eerste instantie geen zetten, maar met behulp van een kleurproces hebben we zelf kunstmatig zetten (=stappen) gefabriceerd. Hierdoor waren we in staat om de plakte en de gevouwen ribben op te vatten als verbindende en splitsende zetten.

In de formules (M1) en (M2) spelen de passen dezelfde rol als de zetten in formules (C1) en (C2). En inderdaad kunnen we de passen van een fatsoenlijke planeet weer als zetten van een proces opvatten. Dat gaat met behulp van de zondvloed uit Maxwells bewijs. In het begin van het proces is de waterspiegel hoger dan het hoogste dal, maar lager dan de laagste pas. In elk dal staat dus een meer. Aan het einde van het proces is de waterspiegel lager dan de laagste top, maar hoger dan de hoogste pas. Alleen de toppen steken dus nog boven het water uit.



situatie-1-pas



situatie-2-pas

Vraag 3

Nu moeten we het proces nog in zetten opdelen en wel zo, dat elke zet met een pas correspondeert. Hoe doe je dat?

Vraag 4
De situatie-2-passen kunnen we nu als verbindende zetten opvatten. Wat verbinden zij?
De situatie-1-passen kunnen we als splitsende zetten opvatten. Wat splitsen zij?

De dalen spelen de rol van de plustekens en de toppen die van de gebieden. Formule (M2) correspondeert dus met formules (C1) en (E1) en formule (M1) correspondeert met formules (C2) en (E2).

Vraag 5
We kunnen formule (M1) ook met (C1) en (E1) laten corresponderen en formule (M2) met (C2) en (E2). Hiervoor moeten we een proces bedenken, waarbij de situatie-1-passen de verbindende zetten en de situatie-2-passen de splitsende zetten zijn. Bedenk zo’n proces.